Прогноз величины характеристической скорости выведения на низкую околоземную орбиту

Ю. И. Лобановский

Цель расчетов – понимание, а не числа.
Р. Хэмминг

Краткое содержание

В работе рассматривается метод интегральных оценок гравитационных, аэродинамических потерь, потерь на управление и на противодавление, и, соответственно, характеристической скорости выведения полезной нагрузки на низкую околоземную орбиту. Приведены верифицированные данные этих потерь для трех ракет: лунной ракеты-носителя Saturn V, баллистической ракеты Titan II и гипотетического одноступенчатого носителя с двигателями РД-0120 (результат решения дифференциальных уравнений). С учетом данных, относящихся к ракете Зенит-2SLB, получены формулы оценки потерь для ракет-носителей с последовательной и параллельной работой ступеней. Чтобы применять эти формулы, достаточно знать минимальный набор конструктивных параметров ракеты-носителя. Для указанных трех ракет погрешность при определении потерь составляет не более ± 5 – 10 м/с. Выведенные формулы были использованы для расчета параметров выведения ракет-носителей Союз-У и Р-7. Полученные в результате этой процедуры массы их полезной нагрузки и орбиты выведения оказались в отличном согласовании с фактическими данными.

Список символов

i – наклонение орбиты
φ – широта пуска
γ – азимут пуска
χ – промежуточный угол
R_0 – радиус планеты
K – гравитационный параметр
g – ускорение земного притяжения
$\hat{g}$ – проекция g на направление движения в пространстве характеристических параметров
h – высота
h^* – характерная высота
h_0 – характерная высота земной изотермической атмосферы, на которой давление уменьшается в e раз
v – скорость
v_0 – круговая скорость на высоте выведения
v^0_r – скорость вращения планеты на экваторе
v_r – скорость вращения планеты на широте пуска
Δv_r – приращение скорости полета ракеты от вращения планеты
Δv_i – приращение скорости полета ступени на участке ее разгона
u – характеристическая скорость
Δu_i – приращение характеристической скорости ступени
Δu_g – гравитационные потери
Δu_a – аэродинамические потери
Δu_c – потери на управление
Δu_p – потери на противодавление
w – характерная скорость
M – число Маха
a – ускорение $\left(a = dv / dt\right)$
$\hat{a}$ – характеристическое ускорение $\left(\hat{a} = du / dt\right)$
m – масса
m_0 – стартовая масса
m^* – стартовая масса ракеты Saturn V
m_e – конечная масса
I_{sp} – удельный импульс ракетного двигателя
I^0_{sp} – вакуумный удельный импульс
I^1_{sp} – приземный удельный импульс
$\Delta I^0_{sp} = I^0_{sp} - I^1_{sp}$
$\langle I^*_{sp} \rangle$ – удельный импульс, осредненный по участку траектории (среднеинтегральный удельный импульс)

$\langle I^0_{sp} \rangle$ – удельный импульс, осредненный по всему участку разгона
ΔI^p_{sp} – потери удельного импульса на противодавление
p – давление воздуха
p_1 – давление воздуха у поверхности Земли
ρ – плотность воздуха
G – вес
T – сила тяги
θ – стартовая тяговооруженность
$\vartheta = \theta - 1.17$
C_x – коэффициент сопротивления
q – скоростной напор
S – площадь
t – время
τ, $\Delta\tau$ – интервал времени
τ^* – время разгона ракеты до высоты h^*
τ_0 – время разгона ракеты до высоты h_0
s – безразмерный параметр
$\Phi(s)$ – интеграл вероятностей
$\Psi(s)$ – функция параметра s
n – число ступеней
N – номер разгонного участка
ξ – масштаб
r – безразмерный множитель
k_c – корректирующий множитель
k_u – коэффициент гравитационной разгрузки

Индексы нижние

s – начальный
f – конечный
g – гравитационный
p – связанный с противодавлением
c – связанный с управлением
a – аэродинамический
ω – связанный с вращением
$\sum$ – суммарный

Индексы верхние

0 – вакуумный
1 – приземный/относящийся к первой ступени ракеты
*– характерный
(i) – номер итерации

I – Введение

Для определения массы полезной нагрузки, выводимой ракетой-носителем на орбиту, необходимо решить дифференциальные уравнения ее движения. Однако, при решении уравнений необходимо иметь достаточно полную информацию об этой ракете, чего может и не быть на начальной стадии ее проектирования. Кроме того, численные расчёты дают только числа, которые являются базой для получения обобщающих зависимостей. Может оказаться, что для того, чтобы на основании этих данных можно было бы сделать какие-либо общие выводы, потребуются затратить усилий больше, чем возможно или необходимо. Поэтому для первоначальных оценок в качестве первого приближения зачастую целесообразно применять упрощенные подходы, базирующиеся на использовании формулы Циолковского:

$$\frac{m_e}{m_0} = \exp\left(-\frac{u}{I_{sp}}\right), \tag{1}$$

где m_e – конечная масса ракеты на участке разгона, m_0 – стартовая масса ракеты, u – характеристическая скорость на участке разгона, I_{sp} – удельный импульс ракетного двигателя.

При разгоне ракеты в отсутствии внешних сил характеристическая скорость u равна скорости полета v после завершения разгона. Однако, в реальных условиях часть силы тяги двигателей расходуется на работу против различных сил: гравитационных, аэродинамических, сил инерции (в связанной системе координат). Затраты на преодоление этих сил принято называть, соответственно, гравитационными потерями – Δu_g, аэродинамическими – Δu_a и потерями на управление – Δu_c. Кроме того, удельный импульс ракетного двигателя зависит от давления окружающей среды, и исторически сложились 2 подхода для учета этого обстоятельства. Один из них условно можно назвать российским, когда в формуле (1) в качестве удельного импульса используется импульс I^0_{sp}, соответствующий идеальным условиям, то есть вакууму, а влияние давления атмосферы, как и все остальное, учитывается через так называемые потери на противодавление – Δu_p. Другой подход – американский, когда потери на противодавление в характеристическую скорость u не входят, а удельный импульс уменьшается на величину ΔI^p_{sp}, приводящую в расчете по формуле (1) к аналогичному результату. Очевидно, что

$$\frac{\Delta I^p_{sp}}{I^0_{sp}} = \frac{\Delta u_p}{u} \qquad (2)$$

С точки зрения цельности предпочтительным представляется российский подход, однако при прямых оценках потерь на противодавление зачастую целесообразно использовать и подход американский. При сравнении данных всегда надо помнить об имеющемся различии в подходах. Следует также отметить, что и в популярных книгах на русском языке, например, [1, 2], в значительной степени базирующихся на англоязычных источниках, может использоваться американский подход учета влияния давления атмосферы на выводимую ракетой полезную нагрузку, причем без всякого уведомления об этом.

В дополнение ко всем указанным выше потерям надо учесть начальные условия – проекцию скорости движения точки старта на направление разгона аппарата Δu_ω. Тогда, характеристическая скорость ракеты может быть записана следующим образом:

$$u = v + \Delta u_g + \Delta u_c + \Delta u_a + \Delta u_p + \Delta u_\omega, \qquad (3)$$

и в формуле (1) под удельным импульсом I_{sp} следует понимать вакуумный удельный импульс I^0_{sp}.

II – Сравнение потерь и характеристических скоростей четырех ракет

Целью данной работы является получение оценочных зависимостей для компонент формулы (3), причем эти зависимости должны основаться на простых физических соображениях и статистических данных. Для получения статистической информации, используемой для вывода и верификации приближенных формул, автор будет использовать все известные ему данные, касающиеся величины потерь, проверенные и правильно интерпретированные.

Рассмотрим величины потерь четырех ракет: лунной ракеты Saturn V (наклонение промежуточной орбиты i = 32.6°) [2, 3], баллистической ракеты Titan II (i = 87.1° при азимуте пуска γ = 0) [3], гипотетического одноступенчатого носителя с водородно-кислородным ракетным двигателем РД-0120 (ОН) (i = 51.6°) [4] и ракеты-носителя Зенит-2SLB [5] (i = 51.6°), приведенные в таблице 1:

Таблица 1

N	Δv_i	Δu_i	Δu_g	Δu_c	Δu_a	Δu_p	Δu_ω	Δu_Σ
Saturn V								
1	2.760	3.760	1.220	–	0.045	0.125	– 0.390	1.000
2	4.175	4.695	0.335	0.185	–	–	–	0.520
3	0.855	0.865	0.005	0.005	–	–	–	0.010
4	3.055	3.170	0.115	–	–	–	–	0.115
∑	10.845 1)	12.490	1.675	0.190	0.045	0.125	– 0.390	1.645
Titan II								
1	2.500	3.820	1.090	–	0.120	0.110	0.000	1.320
2	4.705	5.260	0.410	0.145	–	–	–	0.555
∑	7.205 2)	9.080	1.500	0.145	0.120	0.110	0.000	1.875
Одноступенчатый носитель (ОН)								
1	7.790	9.090	1.075	0.145	0.100	0.265	– 0.285	1.300

Зенит-2SLB								
1	3.090	3.955	0.960	–	0.130	0.060	– 0.285	0.865
2	4.815	5.280	0.320	0.145	–	–	–	0.465
∑	7.905 3)	9.235	1.280	0.145	0.130	0.060	– 0.285	1.330

Примечания: 1) – траектория полета к Луне
2) – баллистическая траектория
3) – круговая орбита высотой 400 км

Здесь N – номер разгонного участка (как известно, третья ступень ракеты носителя Saturn V запускалась дважды – на последнем участке траектории выведения корабля Apollo и разгонного блока на низкую околоземную орбиту и при разгоне к Луне; все данные относятся к полёту корабля Apollo 11). Далее, Δv_i – приращение скорости полета ступени на участке ее разгона, Δu_i – соответствующее приращение характеристической скорости, Δu_Σ – сумма всех потерь и влияния вращения Земли, остальные величины описаны ранее. Прочерки означают отсутствие потерь или их пренебрежимо малую величину на данном участке разгона.

Все величины, приведенные в таблице 1, измеряются в км/с, точность их определения – не менее 0.005 км/с. Это связано с тем, что данные в таблице получены из различных источников [1 – 5], и их точность изменяется от 0.1 м/с до десятков м/с, причем последние данные были уточнены баллистическими расчетами, погрешность которых оценивается величиной 5 м/с.

В таблице 2 с той же точностью 0.005 км/с приведены удельные импульсы ракетных двигателей, рассматриваемых в данном разделе статьи ракет, а также использованных для верификации полученных формул ракет-носителей Союз-У (11А511У) и Р-7-3 – вариант ракеты Р-7, использованный при запуске третьего искусственного спутника Земли: I^0_{sp} – в вакууме и I^1_{sp} – у земли [6 – 13]:

Таблица 2

N	**Двигатель**	$\mathbf{I^0_{sp}}$	$\mathbf{I^1_{sp}}$
Saturn V			
1	**F-1**	2.980	2.605
2	**J-2**	4.170	–
3	**J-2**	4.170	–
4	**J-2**	4.170	–
Titan II			
1	**LR-87-7**	2.905	2.530
2	**LR-91-7**	3.100	–
Одноступенчатый носитель (ОН)			
1	**РД-0120**	4.460	3.465
Зенит-2SLB			
1	**РД-171**	3.305	3.035
2	**РД-120**	3.430	–
Союз-У			
1	**РД-117**	3.080	2.520
2	**РД-118**	3.090	2.430
–	**РД-117/118**	3.080	2.505
3	**РД-0110**	3.195	–
Р-7-3			
1	**РД-107** 1)	2.980	2.455 2)
2	**РД-108** 1)	2.990	2.375 2)
–	**РД-107/108** 1)	2.980	2.440

Примечания: 1) – двигатели образца 1957 года
2) – оценка

Для близких по характеристикам двигателей РД-117 первой и РД-118 второй ступеней ракеты-носителя Союз-У кроме значений удельных импульсов I0sp и I1sp приведены также и их средние величины со статистическими весами 0.81 и 0.19 в соответствии с их суммарной тягой при параллельной работе на режиме разгона первой ступени. Именно эти данные используются в дальнейших оценках на участке полета первой ступени. То же самое относится и к паре двигателей РД-107 и РД-108.

Следует отметить, что для ракеты Saturn V по данным [1, 2] с указанными в таблице 1 скоростями полета и потерями и приведенными в таблице 2 удельными импульсами был выполнен баллистический расчет ее полета. Предполагалось, что после завершения разгона первых двух ступеней остаток топлива составлял 1.0 % от его начального значения, у третьей ступени по завершению разгона на участке 4 – 1.5 %, а система аварийного спасения LES сбрасывалась сразу после отделения первой ступени. Влиянием работы твердотопливных двигателей осадки топлива, которое частично компенсировалось паузой между прекращением работы двигателя предыдущей ступени и началом работы ступени последующей, пренебрегалось (по данным источника [2] приращение скорости при полете с выключенными маршевыми двигателями в период разделения ступеней составляло 3 – 7 м/с). Стартовая масса комплекса Saturn V – Apollo 11 после суммирования всех компонент [1] получилась равной 2945 т. После того, как была учтена работа двигателей F-1 первой ступени ракеты-носителя на стартовом столе при выходе на режим полной тяги в среднем в течение 4.5 с и в течение 1.6 с – на режиме полной тяги [2], на что было израсходовано около 45 т топлива, скорости на всех участках разгона оказались согласованы через формулы (1) и (3) с указанной в таблице точностью при указанных в источнике [1] значениях масс конструкции и топлива.

Приведенные в источнике [2] величины потерь третьей ступени были разделены на 2 участка ее разгона. Потери на управление были отнесены к первому из них, так как там требовался некоторое изменение угла тангажа при выходе на околоземную орбиту. Гравитационные потери на участке 4 (разгон к Луне) легко определяются из законов сохранения энергии и момента импульса при известных высотах начала (h_1 = 188 км) и конца (h_2 = 323 км) разгона и его конечной скорости v_2 = 10.845 км/с:

$$\Delta u_g = \frac{2K}{v_1 + v_2}\left(\frac{1}{R_0 + h_1} - \frac{1}{R_0 + h_2}\right),$$

$$v_1 = v_2 + \Delta u_g,$$

где K – гравитационный параметр Земли, а R_0 – ее номинальный радиус. Если принять $v^{(1)}{}_1 = v_2$, то после двух итераций процесс расчета величины v_1 сходится, и значение скорости, необходимой для полета к Луне в экспедиции Apollo 11, на начальной высоте разгона оказывается равным 10.960 км/с, а гравитационные потери на участке разгона 4 составляют, соответственно, 0.115 км/с (см. таблицу 1).

В скорость v одноступенчатого носителя и, соответственно, в его характеристическую скорость u включена скорость довыведения с эллиптической переходной орбиты на круговую, равная 0.055 км/с, и легко определяемая из законов сохранения момента импульса и энергии.

Аэродинамические потери, потери на управление и на противодавление ракеты-носителя Зенит-2SLB (а также влияние вращения Земли) были вычислены по полученным в разделах III, VI – VIII данной работы выражениям. Характеристические скорости ступеней были получены из баллистического расчета, аналогичного тому, что был проделан для ракеты Saturn V (относительные остатки топлива – 1.5 %). После этого гравитационные потери Зенита-2SLB были определены как разность характеристической и полетной скоростей этой ракеты за вычетом всех остальных потерь.

III – Влияние вращения Земли

Линейная скорость движения точки старта относительно центра планеты в направлении запад – восток определяется ее широтой:

$$v_r = v_r^0 \cos\varphi,$$

где $v^0{}_r$ – скорость вращения планеты на экваторе, φ – широта пуска. Промежуточный угол χ между направлениями векторов скорости ракеты-носителя и вращения планеты, необходимый для дальнейших вычислений, определяется из следующего выражения [4]:

$$\chi = \arcsin\left(\frac{\cos i}{\cos\varphi}\right),$$

где i – наклонение орбиты.

Скорость на круговой орбите высотой h от поверхности планеты с гравитационным параметром K и радиусом R_0, как известно, равна:

$$v_0 = \left(\frac{K}{R_0 + h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Конечная абсолютная скорость на орбите выведения на высоте ее апоцентра v_1 вычисляется из теоремы косинусов:

$$v_1 = (v_0^2 + v_r^2 - 2 v_0 v_r \sin \chi)^{\frac{1}{2}}$$

Азимут пуска γ определяется из теоремы синусов:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{v_0}{v_1} \cos \chi \right),$$

а приращение скорости ракеты от вращения планеты Δv_r равно:

$$\Delta v_r = v_r \sin \gamma$$

и

$$\Delta u_\omega = -\Delta v_r \qquad (4)$$

Следует отметить, что приведённые формулы строго справедливы только в случае прямого выведения на орбиту. При использовании довыведения они будут несколько более сложными, однако, для рассматриваемых здесь низких орбит погрешность при вычислении влияния вращения планеты на характеристическую скорость от использования формул раздела III пренебрежимо мала и в последнем варианте выведения [4].

Очевидно, что абсолютная величина угла наклонения орбиты не может быть больше, чем широта пуска:

$$|\, i \,| \le \varphi$$

Максимальное изменение модуля характеристической скорости выведения вследствие вращения планеты $|\Delta v_r| = v_r$ происходит при $i = \pm \varphi$, то есть при азимуте пуска $\gamma = \pm 90^{\circ}$.

Линейная скорость вращения Земли на экваторе v^0_r = 0.465 км/с, гравитационный параметр K = $3.986 \cdot 10^5$ км^3/с^2, а радиус Земли $R_0 = 6.371 \cdot 10^3$ км. Широта пуска с космодрома на мысе Канаверал (Saturn V, Titan II) принималась равной 28.5°, а с космодрома Байконур (Зенит-2SLB, Союз-У, Р-7, одноступенчатый носитель) – 47.0°.

IV – Интегральная модель разгона на начальном участке траектории

Как видно из таблицы 1, бóльшая часть гравитационных потерь, которые составляют львиную долю всех потерь, а также потери на противодавление и потери аэродинамические относятся к той части разгонной траектории, которая приходится на первую ступень ракеты. Гравитационные потери наиболее интенсивно набираются, когда ракета движется вертикально вверх, а ее масса максимальна. Тогда, как правило, бóльшая часть силы тяги ракетных двигателей расходуется не на разгон, а на уравновешивание силы притяжения Земли. Для этого участка траектории легко получить адекватные оценки гравитационных потерь, а оставшуюся их часть можно интерполировать с использованием определяющих параметров по имеющимся в таблице 1 данным.

В качестве характерной высоты траектории, при разгоне до которой используется прямая оценка гравитационных потерь, примем высоту h^* = 12.75 км. При выходе на эту высоту траектория ракеты-носителя, как правило, еще мало отличается от вертикальной, поэтому оценки параметров траектории ракеты и гравитационных потерь просты. На этой высоте двигатель РД-0120 одноступенчатого носителя выходит на расчетный режим работы, когда давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды (17 кПа), при этом его удельный импульс составляет 4.280 км/с [14], и знание правильного его значения позволяет более точно определить его и в других точках траектории, при том, что именно у этого двигателя имеется наибольшее различие в вакуумном и приземном удельных импульсах. На близкой высоте (13.25 км) достигается максимальный скоростной напор при разгоне ракеты Saturn V, что важно для оценки аэродинамических потерь. Ракета Союз-У выходит на режим максимального скоростного напора на высоте 12.25 км, что также не сильно отличается от характерной высоты.

Давление воздуха на начальном участке траектории рассчитывалось по упрощенной экспоненциальной модели изотермической атмосферы:

$$p(h) = p_1 \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right), \tag{5}$$

где p_1 – давление у поверхности Земли, h – высота траектории, h_0 – характерная высота (h_0 = 7.16 км). Следует отметить, что давление по модели стандартной атмосферы на высоте 12.75 км практически то же самое [15].

В окончательных оценочных выражениях для удобства и единообразия используемых параметров, в основном имеющих размерность скорости, характерная высота h^* заменяется на характерную скоростью w:

$$w = \sqrt{2gh^*}, \tag{6}$$

где g – ускорение свободного падения. При h^* = 12.75 км скорость w = 0.500 км/с.

Таким образом, активный участок разгона первой ступени ракеты делится на 2 части – на отрезок до характерной высоты 12.75 км и на оставшуюся часть. Если на первом отрезке и происходят отклонения траектории от вертикали, в оценках ими пренебрегается. Обозначим время разгона на первом участке как τ^*, а стартовую тяговооруженность – отношение силы тяги T к весу G, через θ:

$$\theta = \frac{T}{G}$$

Тогда время разгона τ^* до высоты h^* равно

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2h^*}{a^*}} = \frac{w}{\sqrt{a^* g}}, \tag{7}$$

где a^* – «среднеинтегральное» ускорение носителя на данном участке траектории, которое, в свою очередь определяется как среднее геометрическое начального a_s и конечного a_f ускорений (k_c – корректирующий множитель):

$$a^* = k_c (a_s a_f)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Выражение (8) выбрано для определения среднеинтегрального ускорения, использование которого при определении параметров разгона заменяет интегрирование по текущему ускорению a(t), потому, что зависимость ускорения от времени близка к экспоненциальной. Тогда в логарифмическом масштабе зависимость a(t) будет близка к линейной, а среднее арифметическое в этом масштабе соответствует среднему геометрическому в масштабе исходном. При правильности выбора формы выражения (8) величина корректирующего множителя k_c должна быть близка к 1.00.

Скорость ракеты в конце рассматриваемого участка разгона равна

$$v = a^* \tau^*, \tag{9}$$

гравитационные потери составят величину

$$\Delta u_g^* = g\tau^*, \tag{10}$$

а их сумма, с учетом того, что потери на противодавление в этой оценке удобнее учитывать через уменьшение удельного импульса, а аэродинамическими потерями пока пренебрегается, является характеристической скоростью на этом участке разгона:

$$\Delta u^* = v + \Delta u_g^* \tag{11}$$

Так как изменение удельного импульса ракетного двигателя пропорционально изменению внешнего давления [14, 16], по известным значениям удельного импульса у земли I^1_{sp} и на заданной высоте I^*_{sp} или в вакууме I^0_{sp} с помощью формулы (5) нетрудно определить его значения на любой высоте. Обозначим разность между удельными импульсами на заданной высоте и у земли как ΔI^*_{sp}:

$$\Delta I^*_{sp} = I^*_{sp} - I^1_{sp},$$

а разность между соответствующими давлениями как Δp^*:

$$\Delta p^* = p_1 - p^*$$

Тогда среднеинтегральный по времени удельный импульс $<I^*_{sp}>$ на участке траектории от 0 до высоты h^* будет определяться следующим образом ($\Delta\tau = \tau^*$):

$$< I^*_{sp} > = \frac{1}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau} I_{sp}(t)dt = \frac{1}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\left\{I^*_{sp} + \left[I_{sp}(t) - I^*_{sp}\right]\right\}dt = \frac{1}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\left[I^*_{sp} + \frac{p^* - p(t)}{\Delta p^*}\Delta I^*_{sp}\right]dt$$

Используя формулу (5), получим

$$< I^*_{sp} > = \frac{1}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\left\{I^*_{sp} + \frac{\Delta I^*_{sp} p_1}{\Delta p^*}\left[\exp\left(-\frac{h^*}{h_0}\right) - \exp\left(-\frac{h(t)}{h_0}\right)\right]\right\}dt$$

Выражая высоту h через среднеинтегральное ускорение a^* и время t

$$h(t) = \frac{a^* t^2}{2},$$

а также, проведя замену переменных

$$s = \left(\frac{a^*}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}} t,$$

получаем следующее выражение для осредненного по времени удельного импульса:

$$< I^*_{sp} > = I^*_{sp} + \frac{\Delta I^*_{sp} p_1}{\Delta p^* s^*}\Psi\left(s^*\right), \qquad (12)$$

где

$$\Psi\left(s^*\right) = s^* \exp\left[-\frac{\left(s^*\right)^2}{2}\right] - \sqrt{2\pi}\,\Phi\left(s^*\right), \qquad (13)$$

$\Phi(s)$ – интеграл вероятностей, табличные значения для которого можно найти в любом математическом справочнике (см., например, [17]):

$$\Phi(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{s^*}\left[\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\right]ds,$$

а s^* – значение параметра s, соответствующее высоте h^*:

$$s^* = \left(\frac{2h^*}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$

Теперь нетрудно получить степень увеличения ускорения ракеты вследствие уменьшения ее массы на участке разгона до высоты h^*:

$$r_1 = \exp\left(\frac{\Delta u^*}{\left\langle I_{sp}^* \right\rangle}\right) \qquad (15)$$

и, учитывая то, что при постоянном расходе топлива тяга ракетных двигателей пропорциональна их удельному импульсу, степень роста ускорения вследствие увеличения тяги ее ракетных двигателей:

$$r_2 = \frac{I_{sp}^*}{I_{sp}^1} \qquad (16)$$

После этого с учетом действия ускорения земного притяжения определяется конечное ускорение a_f на рассматриваемом участке разгона:

$$a_f = r_1 r_2 (a_s + g) - g = r_1 r_2 a_s - (1 - r_1 r_2) g,$$

и среднеинтегральное ускорение a^*:

$$a^* = k_c \{a_s [r_1 r_2 a_s - (1 - r_1 r_2) g]\}^{1/2} \qquad (17)$$

Таким образом, система соотношений (7), (9) – (11), (15) – (17), связывающая основные интегральные параметры на вертикальном участке разгона 0 – h^*, замыкается. Ее можно решать методом последовательных приближений, принимая в качестве первого приближения значение $a^{*(1)} = a_s$. Через 5 – 6 итераций процесс расчета сходится.

V – Гравитационные потери

Гравитационные потери, как видно из таблицы 1, являются большей частью всех потерь, поэтому желательно иметь способ оценивать их как можно точнее. Несмотря на различие числа ступеней у ракет Saturn V и Titan II, гравитационные потери их первых ступеней при выведении ракет на траектории, близкие к низкоорбитальным, с точностью 3 – 4% составляют 3/4 от полных гравитационных потерь. Следует отметить, что при выходе на низкую околоземную орбиту ракета Saturn V является фактически двухступенчатой, так третья ступень используется практически для довыведения, и ее характеристическая скорость на этом участке составляет всего около 9 % от общей. Кроме того, если разделить общую характеристическую скорость при выведении на низкую орбиту этой ракеты-носителя (9.32 км/с) на две части, пропорциональные удельным импульсам двигателей F-1 и J-2, то характеристическая скорость первой ступени при таком оптимальном делении составит 3.88 км/с, что всего на 3 % больше ее реальной величины. Поэтому в дальнейшем приближенном анализе ракета Saturn V на участке выведения полезной нагрузки на низкую околоземную орбиту будет рассматриваться как двухступенчатая, так же как и ракета Titan II, а оптимальное деление характеристической скорости между ступенями ракеты пропорционально удельным импульсам их ракетных двигателей может использоваться при отсутствии определенных данных о подобном делении.

Решение системы алгебраических уравнений (7), (9) – (11), (15) – (17) при разгоне ракеты-носителя Saturn V до высоты h^* = 12.75 км с начальным ускорением a_s = 1.68 м/с^2 и удельными импульсами I^*_{sp} = 2.915 км/с и $\langle I^*_{sp}\rangle$ = 2.745 км/с (получено из формул (12) – (14) при заданном времени разгона 79.5 с [2]) приводит к определению величины корректирующего множителя k_c = 1.015. Основные параметры в итоге оказываются следующими: среднеинтегральное ускорение – a^* = 4.03 м/с^2, скорость полета в конце данного участка разгона – v = 0.320 км/с, и гравитационные потери – Δu^*_g = 0.780 км/с.

Для одноступенчатого носителя при его разгоне до высоты h^* = 12.75 км с начальным ускорением a_s = 3.92 м/с^2 и удельными импульсами I^*_{sp} = 4.280 км/с и $\langle I^*_{sp}\rangle$ = 3.835 км/с при k_c = 1.015 аналогичные основные параметры оказались следующими: время разгона $\Delta\tau$ = 59.5 с, среднеинтегральное ускорение a^* = 7.18 м/с^2, скорость полета в конце данного участка разгона v = 0.425 км/с, и гравитационные потери Δu^*_g = 0.585 км/с.

В случае ракеты-носителя Зенит-2SLB аналогичные данные следующие: начальное ускорение a_s = 5.89 м/с^2, удельные импульсы I^*_{sp} = 3.255 км/с и $\langle I^*_{sp}\rangle$ = 3.105 км/с. При k_c = 1.015 основные параметры разгона до высоты h^* таковы: время разгона $\Delta\tau$ = 52.4 с, среднеинтегральное ускорение a^* = 9.28 м/с^2, скорость полета в конце данного участка разгона v = 0.485 км/с, и гравитационные потери Δu^*_g = 0.515 км/с.

Для ракеты-носителя Союз-У рассматриваемые данные таковы: начальное ускорение a_s = 3.19 м/с^2, удельные импульсы I^*_{sp} = 2.985 км/с и $\langle I^*_{sp}\rangle$ = 2.725 км/с. Основные параметры разгона до высоты h^*

следующие: время разгона $\Delta\tau = 62.0$ с, среднеинтегральное ускорение $a^* = 6.63$ м/с^2, скорость полета в конце данного участка разгона $v = 0.410$ км/с, и гравитационные потери $\Delta u^*_g = 0.610$ км/с

Как уже указывалось в разделе IV, при выведении системы уравнений (7), (9) – (11), (15) – (17) аэродинамические потери не учитывались. Однако, после того как получены параметры разгона на рассмотренном участке траектории, можно попытаться оценить там и эти потери для одновременного уточнения и упрощения процедуры расчёта гравитационных потерь. Известно, что максимальный коэффициент сопротивления C_x достигается на трансзвуковых скоростях, обычно, при числе Маха M = 1.1 – 1.3, а максимальные скоростные напоры по траектории у ракет-носителей реализуются там же. Поэтому, основная доля аэродинамических потерь набирается на узком участке в окрестности этой точки траектории.

По данным работы [2] максимальный скоростной напор при полете ракеты Saturn V достигается на 81 с, то есть на высоте около 13.25 км. При этом полные аэродинамические потери составляют около 0.045 км/с. Скорость полета на этой высоте была равна $v = 0.335$ км/с, M = 1.15. Отсюда можно оценить эти потери до характерной высоты $h^* = 12.75$ км величиной 0.015 – 0.020 км/с, а полную характеристическую скорость как $\Delta u^* = 1.115$ км/с. Решая указанную выше систему соотношений для одноступенчатого носителя можно получить, что то же число Маха M = 1.15 достигается на высоте 8.90 км. Следовательно, к моменту достижения характерной высоты $h^* = 12.75$ км одноступенчатый носитель набирает подавляющую часть своих аэродинамических потерь, общая величина которых составляет 0.100 км/с [4]. Отсюда следует оценка его потерь до заданной высоты – 0.080 – 0.090 км/с. При этом полная характеристическая скорость одноступенчатого носителя на этом участке траектории будет равна $\Delta u^* = 1.095$ км/с. Таким образом, два аппарата, находящиеся в существенно разных точках спектра параметров, определяющих разгон ракет-носителей на стартовом участке, имеют практически одинаковые величины характеристической скорости Δu^*. Вследствие этого в дальнейших расчетах примем величину $\Delta u^* = 1.10$ км/с для высоты $h^* = 12.75$ км за константу.

Используем для проверки этих оценок данные по ракете Союз-У: время достижения максимального скоростного напора для нее составляет 61.5 с [18], что соответствует высоте 12.25 км, скорости полета 0.390 км/с и числу Маха $M \approx 1.30$. Из формулы (27) раздела VII следует, что аэродинамические потери Δu_a этой ракеты составляют 0.100 км/с. Так как точка траектории с максимальным скоростным напором приходится на высоте на 0.50 км ниже характерной, оценим аэродинамические потери до характерной высоты величиной 0.055 – 0.060 км/с. При этом полные потери будут равны $\Delta u^* = 1.08$ км/с, что отлично согласуется с предшествующей оценкой. Если учесть, что аэродинамические формы ракеты Союз-У существенно более сложны, чем у других рассматриваемых в этой работе ракет, можно ожидать, что ее аэродинамические потери в реальности могут быть несколько выше полученных оценок, и тогда согласование полных потерь на характерной высоте $h^* = 12.75$ км с величиной $\Delta u^* = 1.10$ км/с будет еще лучше.

Тогда, вместо итерационного решения уравнений (7), (9) – (11), (15) – (17) достаточно при w = 0.500 км/с и $\Delta u^* = 1.10$ км/с последовательно вычислить 4 параметра разгона, чтобы определить гравитационные потери Δu^*_g:

$$r_1 = \exp\left(\frac{\Delta u^*}{\left\langle I^*_{sp}\right\rangle}\right) \tag{18}$$

$$r_2 = \frac{I^*_{sp}}{I^1_{sp}} \tag{19}$$

$$a^* = k_c\left\{a_s\left[r_1 r_2 a_s - (1 - r_1 r_2)g\right]\right\}^{1/2} \tag{20}$$

$$\tau^* = \frac{w^*}{\sqrt{a^* g}} \tag{21}$$

$$\Delta u^*_g = g\tau^* \tag{22}$$

Для ракеты Titan II расчет проводился при $a_s = 2.78$ м/с^2 и удельных импульсах $I^*_{sp} = 2.840$ км/с и $\langle I^*_{sp}\rangle = 2.670$ км/с Полученные таким образом величины гравитационных потерь на стартовом участке разгона Δu^*_g приведены в таблице 3 для шести рассматриваемых ракет. Там же показаны число ступеней n, стартовые тяговооруженности θ, полные гравитационные потери этих ракет Δu_g и гравитационные потери первых ступеней $\Delta u^1_g = (3/4)\Delta u_g$, а также отношение $\Delta u^*_g/\Delta u^1_g$:

Таблица 3

Ракета	n	θ	Δu_g	Δu^1_g	Δu^*_g	$\Delta u^*_g/\Delta u^1_g$
Saturn V	2 [1)]	1.170	1.560	1.170	0.780	0.667
Titan II	2	1.285	1.500	1.125	0.650	0.578
Союз-У	3	1.325	1.470	1.085	0.610	0.561
ОН	1	1.400	1.075	1.075	0.585	0.543
Р-7-3	2	1.500	1.305	0.980	0.525	0.536
Зенит-2SLB	2	1.605	1.280	0.960	0.515	0.536

Примечание: [1)] – фактически при выведении полезной нагрузки на низкую околоземную орбиту

При этом полные гравитационные потери Δu_g для ракет Saturn V, Titan II, Зенит-2SLB с последовательной работой ступеней и одноступенчатого носителя получены из указанных выше источников, а данные для ракет Союз-У и Р-7-3 – расчетные. Очевидна корреляция отношения $\Delta u^*_g/\Delta u^1_g$ и стартовой тяговооруженности θ, а также очень слабое, практически на границе точности, влияние числа ступеней. Однако, следует отметить, что у рассмотренного варианта одноступенчатого носителя не предусматривалось дросселирование двигателей, что приводит к чрезмерно высоким уровням ускорения на финальном участке разгонной траектории. Если применять дросселирование, то ускорение там снизится, что вызовет некоторый рост гравитационных потерь. По указанным 4 точкам можно построить корреляционную зависимость между гравитационными потерями первой ступени Δu^1_g и параметрами n, Δu^*_g и θ для данных, полученных из внешних источников (здесь $\vartheta = \theta - 1.17$):

$$\Delta u^1_g = \Delta u^*_g\left[1.50 + 2.50\vartheta - 4.25\vartheta^2 + 0.010(n-2)\right],$$

$$1.15 \le \theta \le 1.46,\ n \le 2,$$

$$\Delta u^1_g = \left[1.865 + 0.010(n-2)\right]\Delta u^*_g, \tag{23}$$

$$\theta > 1.46,\ n \le 2$$

При значительном дросселировании двигателей одноступенчатого носителя, коэффициент при члене (n-2) в первом и третьем выражениях из группы формул (23) несколько увеличится. В разделе IX эти зависимости проверяется по характеристикам носителей с параллельной работой первой и второй ступеней из семейства знаменитой ракеты Р-7.

Прогноз величины полных гравитационных потерь Δu_g в рамках построенной модели представлен ниже:

$$\Delta u_g = \frac{(n+2)\Delta u^1_g}{3} \tag{24}$$

Вследствие того, что при наличии третьей ступени ее гравитационные потери близки к 0, то, как будет показано далее в разделе IX этой работы на примере ракеты-носителя Союз-У, формулы (23) – (24) вполне применимы и для трехступенчатых ракет с параллельной работой первой и второй ступеней. Но при этом у них в формулах (23) – (24) число ступеней должно считаться равным 2 (n = 2).

Ракета-носитель Saturn V имеет практически минимально допустимую стартовую тяговооруженность, а при большой тяговооруженности θ > 1.46 отношение $\Delta u^*_g/\Delta u^1_g$ оказывается постоянным, и верхняя граница его применимости в данном исследовании не обнаруживаются. Поэтому, пока не найдены примеры, доказывающие обратное, можно считать, что практических ограничений на формулы (23) – (24) в применении их к ракетам-носителям нет. Очень малое различие оценок гравитационных потерь на начальном участке траектории Δu^*_g у ракет-носителей Зенит-2SLB и Р-7-3, несмотря на заметные различия в стартовой тяговооруженности, объясняется тем, что двигатели с меньшими удельными импульсами РД-107/108 вызывают более быстрое уменьшение массы у ракеты Р-7, что приводит к более интенсивному нарастанию ее перегрузок, и, соответственно, к снижению у нее гравитационных потерь на верхней части начального участка траектории.

VI – Потери на управление

При выходе на околоземную орбиту траектория ракеты-носителя из вертикальной на старте постепенно становится совершенно или почти горизонтальной. Затраты на искривление траектории, то есть работа силовой установки ракеты против сил инерции, характеризуется потерями на управление. Вследствие того, что центростремительные силы (в инерциальной системе координат) или, что в данном рассмотрении совершенно эквивалентно, центробежные силы (в системе координат неинерциальной) пропорциональны квадрату скорости полета и обратно пропорциональны радиусу кривизны траектории, потери на управление практически значимы только на участке разгона второй ступени ракеты, так как квадраты средних скоростей первой и второй ступеней различаются у ракет-носителей в 10 – 15 раз (см. таблицу 1). В то же время, третья ступень, если она есть, при выведении на низкую околоземную орбиту движется по траектории с очень большим радиусом кривизны, часто стремящемся к бесконечности.

В зависимости от вида траектории потери на управление могут значительно изменяться. Однако, при использовании оптимальных траекторий выведения, что и представляет наибольший практический интерес, эти потери у различных ракет-носителей варьируются незначительно. Поэтому, в первом приближении при прямом выведении на круговую низкую околоземную орбиту можно считать, что потери на управление Δu_c = 0.190 км/с (см. таблицу 1, данные для ракеты-носителя Saturn V).

При выходе на орбиту по схеме с довыведением с использованием полуэллиптического пассивного участка полета (см. [3]), траектория изгибается там сама под действием силы тяжести. Поэтому в данном случае потери на управление будут меньше, и в первом приближении составят 0.145 км/с (см. таблицу 1, данные для ракеты Titan II, летящей по аналогичной баллистической траектории).

VII – Аэродинамические потери

Вследствие доминирования сил сопротивления при разгоне ракеты над другими аэродинамическими силами, абсолютную величину ускорения ракеты под их действием a_a приближенно можно записать следующим образом:

$$a_a = \frac{C_x qS}{m}, \tag{25}$$

где C_x – коэффициент сопротивления, S – характерная площадь (обычно, площадь поперечного сечения ракеты), m – ее масса, q – скоростной напор, определяемый как

$$q = \frac{\rho v^2}{2},$$

где ρ – плотность воздуха, v – скорость полета. Тогда аэродинамические потери Δu_a за период времени $\Delta\tau$ составят:

$$\Delta u_a = \int_0^{\Delta\tau} a_a(t)dt \tag{26}$$

Из анализа выражений (25) – (26) следует, что фактором, оказывающим наибольшее влияние на аэродинамические потери ракеты, является ее масштаб ξ, который можно определить как

$$\xi \sim m_0^{1/3},$$

где m_0 – стартовая масса ракеты. В самом деле, $a_a \sim S/m$. Это отношение является величиной, обратной нагрузке «на лоб». Чем больше эта нагрузка, тем меньше аэродинамические потери. В первом приближении $m \sim \xi^3$, $S \sim \xi^2$ и $S/m \sim \xi$, где ξ – линейный масштаб ракеты. Следовательно, чем больше стартовая масса ракеты, тем меньше ее аэродинамические потери. Это первая и основная причина, по которой аэродинамические потери ракеты-носителя Saturn V так малы (см. таблицу 1). Стартовая масса ракеты Saturn V – 2945 т, одноступенчатого носителя – 420 т, ракеты Titan II – 150 т, Зенита-2SLB – 460 т, Союза-У – 310 т и Р-7-3 – 270 т. Если масштаб ξ ракеты Saturn V принять за 1, то у одноступенчатого носителя величина ξ будет в 1.91 раза меньше, у ракеты Titan II – в 2.70 раза меньше, Зенита-2SLB – 1.86, а у ракет Союз-У и Р-7 – соответственно в 2.12 и 2.22 раза меньше, чем у ракеты Saturn V.

Известно, что пик коэффициента сопротивления C_x достигается на трансзвуковых скоростях, причем ракеты-носители именно в этом диапазоне чисел Маха проходят зону максимальных скоростных напоров q. Наложение этих пиков двух основных переменных по траектории факторов сопротивления приводит к тому, что трансзвуковая зона дает подавляющий по величине вклад в аэродинамическое сопротивление. Как уже говорилось выше, максимум коэффициента C_x обычно оказывается вблизи точки M = 1.1 – 1.3. Поэтому критически важным является анализ характеристик траектории ракеты в окрестности этой зоны.

Ракета-носитель Saturn V достигает числа M = 1.15 на 81 секунде полета (в момент максимального скоростного напора [2], см. раздел V) на высоте 13.25 км, а одноступенчатый носитель – на 51.5 секунде на высоте 8.90 км. При этом плотность воздуха на меньшей высоте в 1.84 раза выше, чем на большей. Скорость полета из-за несколько большей скорости звука на меньшей высоте на 3 % выше. Следовательно, скоростной напор q там выше в 1.95 раза. Так как время набора этих высот $\Delta\tau$ рассматриваемыми ракетами-носителями различается в 1.57 раза, то при равных нагрузках на лоб m/S и равных коэффициентах сопротивления C_x аэродинамические потери до характерной точки траектории достижения числа Маха M = 1.15 ($\Delta u_a \sim q\Delta\tau$) у одноступенчатого носителя будут примерно в 1.24 раза больше, чем у ракеты Saturn V. При приблизительном подобии траекторий разгона можно ожидать, что такое же соотношение окажется примерно правильным и для полных аэродинамических потерь этих ракет (при равном их масштабе).

Таким образом, следующими после масштаба факторами, определяющими аэродинамические потери, являются высота, на которой ракета достигает число Маха M ≈ 1.15, и время набора этой высоты. Очевидно, что оба этих параметра в первую очередь зависят от ускорения ракеты на данном участке траектории, которое сильно коррелирует со стартовым ускорением, а, значит, и со стартовой тяговоруженностью θ. Из данных предыдущего абзаца получается, что увеличение стартовой тяговооруженности на 0.23 (от величины $\theta = 1.17$ до $\theta = 1.40$) должно привести к росту аэродинамических потерь с 0.045 км/с до 0.056 км/с, то есть на 0.011 км/с. Отсюда следует, что показатель степени функции, связывающей изменение аэродинамических потерь с изменением стартовой тяговооруженности с точностью до второго знака после десятичной точки равен 1.50 – $\Delta(\Delta u_a) \sim (\Delta\theta)^{1.50}$.

С учетом различия масштабов ракеты Saturn V и одноступенчатого носителя получается, что аэродинамические потери первого аппарата в 2.3 раза меньше, чем второго, как и показано в таблице 1. Потери ракеты Titan II по оценке будут в 1.1 раза меньше, чем у одноступенчатого носителя, вследствие меньшей тяговооруженности, и в 1.4 раза больше вследствие различия их масштабов. В целом отношение их аэродинамических потерь составляет около 1.3, что также примерно соответствует имеющимся в таблице 1 данным.

Аппроксимируя данные об аэродинамических потерях из таблицы 1 функцией от параметров ξ и θ, получаем следующую корреляционную зависимость:

$$\Delta u_a = \xi^{-0.90}\left[0.045 + 0.10(\theta - 1.17)^{3/2}\right], \qquad (27)$$
$$\xi = \left(\frac{m_0}{m^*}\right)^{1/3},$$

где параметр m_0 – стартовая масса ракеты, m^* – стартовая масса ракеты Saturn V. Аэродинамические потери ракеты носителя Союз-У из формулы (27) получаются равными 0.100 км/с, такими же, как и одноступенчатого носителя. Набольшая величина аэродинамических потерь Δu_a = 0.130 км/с – у не слишком крупных ракет Зенит-2SLB и Р-7-3, имеющих наибольшую тяговооруженность.

VIII – Потери на противодавление

Наиболее простой и естественный путь интегральной оценки потерь на противодавление состоит в том, чтобы из выражений типа (12) – (14) получить удельный импульс $\langle I^0_{sp} \rangle$, осредненный по всей траектории полета первой ступени или одноступенчатой ракеты, а затем из соотношения

$$\Delta u_p = \frac{\left(I^0_{sp} - \left\langle I^0_{sp} \right\rangle\right) u}{I^0_{sp}}, \qquad (28)$$
$$\left(I^0_{sp} - \left\langle I^0_{sp} \right\rangle = \Delta I^p_{sp}\right)$$

определить величину Δu_p (при рассмотрении многоступенчатой ракеты вместо u надо подставить характеристическую скорость ее первой ступени Δu_1). Однако, при реализации этого подхода имеются две трудности: во-первых, в соотношение (28) входит величина характеристической скорости, вычисление которой и является целью всей работы; во-вторых, интегральные выражения (12) – (14) получены для вертикального участка разгона, а на траектории полета первой ступени, а тем более на активном участке полета одноступенчатой ракеты, горизонтальное удаление от точки старта обычно многократно превышает высоту, и траектория чрезвычайно далека от вертикальной.

Первая трудность легко разрешается. Так как все остальные потери уже могут быть вычислены, а потери на противодавление относительно невелики – они составляют от 1 % до 3 % от характеристической скорости (см. таблицу 1), то для оценки можно к скорости полета, а также ко всем вычисленным до этого потерям (см. формулу (3)), прибавить среднестатистическую по имеющимся данным величину $\Delta u_p^{(1)} = 0.140$ км/с, что приведет к отклонению от точных значений характеристической скорости по рассмотренным вариантам ракет, находящимся практически в крайних точках спектра возможных параметров ракет-носителей, не более чем на 1.3 %. Если же принять $\Delta u_p^{(1)} = 0.100$ км/с для многоступенчатых ракет и $\Delta u_p^{(1)} = 0.250$ км/с для одноступенчатых, тогда погрешность окажется не больше 0.4 %. При необходимости, получив данные по потерям на противодавление, можно повторить расчет уже с уточненными значениями как их самих, так и характеристической скорости.

Вторая трудность разрешается заменой переменных в выражении (14). Так как на вертикальном участке траектории

$$s^* = \left(\frac{2h^*}{h_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\tau^* = \left(\frac{2h^*}{a^*}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau_0 = \left(\frac{2h_0}{a_0^*}\right)^{\frac{1}{2}},$$

то при $a^* > a_0^*$,

$$s^* > \frac{\sqrt{2}\tau^*}{\tau_0}, \qquad (29)$$

где τ^* – общее время разгона ступени, τ_0 – время разгона до высоты h_0 = 7.16 км (высоты земной изотермической атмосферы, на которой давление уменьшается в e раз). Время τ_0 легко вычисляется по интегральным соотношениям (12) – (14), (18) – (21) при w = 0.375 км/с и Δu^* = 0.825 км/с.

На достаточно большой высоте траектория становится скорее горизонтальной, чем вертикальной, поэтому увеличивается время работы двигателя при очень низких давлениях атмосферы. Вследствие этого значение характеристического параметра s^* в таком случае должно быть дополнительно увеличено, чтобы соотношения (12) – (13) давали адекватные оценки для траектории с малым (в среднем) углом тангажа. Расчеты показали, что если определить параметр s^* как

$$s^* = \frac{2\tau^*}{\tau_0}, \qquad (30)$$

то интегральные выражения (12) – (13) при фактическом времени разгона первой ступени для ракет Saturn V и Titan II и расчетном для одноступенчатого носителя ОН дают результаты, отличающиеся от номинальных на величину не более 10 м/с.

Так как в этом случае $\Delta p^* = p_1$ и $s^* > 4.5$, то интеграл вероятности $\Phi(s^*)$ выходит на асимптоту $\Phi(s^*) = 0.500$, а первый член функции $\Psi(s^*)$ стремится к 0. Поэтому $\Psi(s^*) = -(2\pi)^{1/2}/2$, и выражение (12) редуцируется до

$$< I_{sp}^0 > = I_{sp}^0 - \frac{\sqrt{2\pi}\Delta I_{sp}^0}{2s^*} \qquad (31)$$

В таблице 4 приведены времена разгона $\tau^{*(0)}$ для рассмотренных ракет по данным источников [2 – 4, 19, 20] и расчетное время их разгона τ_0 до высоты h_0, номинальные потери на противодавление Δu_p, и потери на противодавление $\Delta u_p^{(0)}$, полученные по формулам (28), (30) и (31):

Таблица 4

Ракета	Двигатель	$\langle I^0_{sp}\rangle$	$\tau^{*(0)}$	$\tau^{*(2)}$	τ_0	Δu_p	$\Delta u_p^{(0)}$	$\Delta u_p^{(1)}$	$\Delta u_p^{(2)}$
Saturn V	**F-1**	2.885	161.5	161.5	63.2	0.125	0.115	0.115	0.120
Titan II	**LR-87-7**	2.825	151	151	52.0	0.110	0.105	0.105	0.110
ОН	**РД-0120**	4.330	225	225	46.9	0.265	0.265	0.270	0.265
Зенит-2SLB	**РД-171**	3.255	143	142.5	41.1	–	0.060	0.060	0.060
Союз-У	**РД-117/118**	2.930	118	127	49.1	–	0.150	0.140	0.140
Р-7-3	**РД-107/108**	2.870	–	130.5	41.7	–	–	0.135	0.135

Здесь все потери характеристической скорости и удельные импульсы измеряются в километрах в секунду, а времена – в секундах.

Значения удельного импульса ракетного двигателя LR-87, приведенные в источнике [3], заметно отличаются от данных модели этого двигателя LR-87-7, использовавшегося на ракете Titan II [7]. Величина потерь на противодавление для этой ракеты определена в [3] как $\Delta u_p = 0.080$ км/с. Описанный выше расчет при удельных импульсах из источника [3] дает $\Delta u_p^{(0)} = 0.075$ км/с, что хорошо согласуется с приведенной там величиной потерь на противодавление. Однако, вследствие явной неадекватности данных по удельному импульсу из [3], потери на противодавление у ракеты Titan II должны быть иными. При правильных значениях удельного импульса двигателя LR-87-7 расчет дает значение $\Delta u_p = 0.105$ км/с. С учетом всех обстоятельств можно полагать, что величина потерь на противодавление – $\Delta u_p = 0.110$ км/с, эта величина потерь принимается в качестве номинальной, и именно она приведена для ракеты Titan II в таблице 1. Таким образом, формулы (28), (30), (31) позволяют с погрешностью не более 5 – 10 м/с определить потери на противодавление.

При предварительном проектировании новых ракет, а также, зачастую, и для ракет существующих, время разгона τ^*, как правило, неизвестно. Для его определения при известной скорости на данном участке разгона снова используем оправдавший себя метод интегральных оценок ускорения. Однако для того, чтобы в явном виде не учитывать потери по траектории и резко упростить алгоритм вычислений, вместо полетной скорости v и среднеинтегрального ускорения a^* для определения времени разгона τ^*, необходимого для вычисления потерь на противодавление, будем использовать характеристическую скорость u и соответствующее, характеристическое среднеинтегральное ускорение $\hat{a}^*$:

$$\tau^* = \frac{u}{\hat{a}^*} \qquad (32)$$

Кроме того, в отличие от случая оценки ускорения на вертикальном участке траектории, на большей части траектории разгона первой ступени, а тем более, одноступенчатого носителя, угол тангажа значительно ближе к 0, чем к $\pi/2$. Вследствие этого проекция ускорения земного притяжения на направление движения в среднем там в несколько раз меньше, чем на вертикальном участке траектории. Введем понятие коэффициента гравитационной разгрузки k_u – множителя в соотношении

$$\hat{g} = k_u g, \qquad (33)$$

показывающего во сколько раз в пространстве характеристических параметров на рассматриваемом участке траектории проекция ускорения земного притяжения на направление движения $\hat{g}$ в среднем меньше самой этой величины. Ясно, что чем больше стартовая тяговооруженность аппарата, тем в меньшей степени на параметры его разгона влияет земное притяжение. Также ясно, что степень уменьшения массы ракеты во время разгона также должна влиять на коэффициент гравитационной разгрузки. Очевидно, что еще одним параметром, влияющим на него, является число ступеней аппарата. Аппроксимация величин коэффициента разгрузки при известных характеристических скоростях разгона первых ступеней ракет Saturn V, Titan II и одноступенчатого носителя, приводящих к известным временам разгона и представленных в таблице 4 в столбце $\tau^{*(0)}$, дала выражение, связывающее коэффициент k_u с выбранными ранее параметрами ракетного аппарата (для одноступенчатого аппарата $\Delta u_1 \equiv \Delta u$):

$$k_u = 0.050 + 0.260\left\{\theta\left[\exp\left(\frac{\Delta u_1}{I^*_{sp}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} - 2.230\right\} - 0.265(n-2) \qquad (34)$$

Коэффициент k_u не должен быть меньше 0, и, как и ранее, в аппроксимационных формулах у многоступенчатых ракет n = 2, даже если реально число ступеней более 2:

$$k_u \geq 0,\ n \leq 2$$

Величина коэффициента гравитационной разгрузки k_u изменяется от 0.044 для ракеты Союз-У на участке разгона первой ступени до 0.258 для одноступенчатого носителя на всем активном участке траектории. Теперь формула (20), позволяющая рассчитывать среднеинтегральное характеристическое ускорение на вертикальном участке траектории разгона, легко обобщается на произвольный ее участок:

$$\hat{a}^* = k_c\left\{a_s\left[r_1 r_2 a_s - (1 - r_1 r_2)\hat{g}\right]\right\}^{1/2} \qquad (35)$$

В качестве первого приближения к значению среднеинтегрального удельного импульса $<I^0_{sp}>$ по траектории нужно брать близкую к ней величину удельного импульса I^*_{sp} на высоте h^* = 12.75 км. Далее, определив из выражений (18) – (19) (подставляя в них Δu_1 вместо Δu^*, I^*_{sp} вместо $<I^*_{sp}>$ и, соответственно, I^0_{sp} вместо I^*_{sp}) и (32) – (35) время разгона τ^*, из формул (30) – (31) вычисляем значение безразмерного параметра s^* и величину среднеинтегрального удельного импульса $<I^0_{sp}>$ по всей траектории разгона. При этом для рассматриваемых ракет получаются потери на противодавление, указанные в столбце $\Delta u_p^{(1)}$ таблицы 4.

Если повторить вычисления, используя в формулах (3) и (18) полученные при первой итерации величины $\Delta u_p^{(1)}$ и $<I^0_{sp}>$ соответственно, придем к значениям времени разгона $\tau^{*(2)}$ и потерь на противодавление $\Delta u_p^{(2)}$, также указанным в таблице 4. Отклонение от номинальных величин составляет от 0 до 10 м/с, что близко к пределу точности данного метода. В таблице 4 приведены также среднеинтегральные по траектории разгона удельные импульсы $<I^0_{sp}>$ двигателей соответствующих ракет, определенные по расчетным данным.

Если неизвестна и характеристическая скорость первой ступени Δu_1, по крайней мере, для случая последовательной работы ступеней, она может быть оценена из условия оптимального деления характеристической скорости (см. раздел V):

$$\Delta u_1 = \frac{I^{(1)}_{sp} u}{\sum_1^n I^{(i)}_{sp}},$$

где $I^{(i)}_{sp}$ – вакуумные удельные импульса ракетных двигателей каждой ступени, а n – число ступеней. В этом случае потери на противодавление $\Delta u_p^{(2)}$ ракет Saturn V, Titan II и одноступенчатого носителя, в целом, несколько больше отклоняются от номинальных значений Δu_p, однако максимальные отклонения также не превышают 10 м/с.

IX – Верификация полученных формул на примере ракет-носителей Союз-У и Р-7

Приведенные в разделах IV – VIII работы выражения были получены с использованием данных о характеристиках ракет-носителей Saturn V, Titan II, Зенит-2SLB с последовательной работой ступеней и одноступенчатого носителя с двигателем РД-0120. Как уже указывалось выше, с помощью этих формул были определены потери гравитационные и аэродинамические, а также потери на управление и на противодавление, возникающие при разгоне трехступенчатой ракеты Союз-У и двухступенчатой ракеты Р-7. Несмотря на то, что аппроксимационные формулы были построены на основе ограниченного массива данных, касающихся только ракет с последовательной работой ступеней, применение их для ракеты с параллельной работой первой и второй ступеней оказалось вполне удачным.

В самом деле, для ракеты Союз-У [20] при массе полезной нагрузки 7.07 т был выполнен баллистический расчет с теми же основными допущениями, что и для ракеты Зенит-2SLB. Из этого расчета были получены характеристические скорости ступеней ракеты-носителя Союз-У, а после вычитания потерь, и их полетные скорости, см. таблицу 5. В результате конечная скорость полезной нагрузки – космического корабля Союз-ТМ стандартной массы позволила ему оказаться на стандартной орбите выведения [21]. Таким образом, из сравнения полученных результатов можно заключить, что погрешности в определении характеристической скорости ракеты-носителя Союза-У, выведения в рамках рассмотренного подхода, составляют не более ± 5 – 10 м/с.

Таблица 5

N	Δv_i	Δu_i	Δu_g	Δu_c	Δu_a	Δu_p	Δu_ω	Δu_Σ
Союз-У								
1	2.000	3.050	1.085	–	0.100	0.150	– 0.285	1.050
2	2.110	2.665	0.365	0.190	–	–	–	0.555
3	3.705	3.705	–	–	–	–	–	–
∑	7.815 [1)]	9.420	1.450	0.190	0.100	0.150	– 0.285	1.605
Р-7-3								
1	2.615	3.675	0.980	–	0.130	0.135	– 0.185	1.060
2	5.610	6.125	0.325	0.190	–	–	–	0.515
∑	8.225 [2)]	9.800	1.305	0.190	0.130	0.135	– 0.185	1.575

Примечания: [1)] – эллиптическая орбита 200 x 240 (км)
[2)] – эллиптическая орбита 225 x 1880 (км)

В принципе еще более сложным объектом для применения выведенных аппроксимационных формул, описанных в разделах IV – VIII, является основа Союза-У – ракета Р-7 [12, 22], вторая ступень которой оказалась первым в истории рукотворным объектом, оказавшимся на околоземной орбите. По существу эта ракета является полуторaступенчатой, что в принципе не было заложено в алгоритмы, которым следовали эти формулы. Однако, как оказалось, отличное согласование результатов получается и для нее. Надо отметить, что первые экземпляры Р-7 непрерывно совершенствовались [13]. Поэтому для определенности были рассмотрены характеристики ракеты, с помощью которой был осуществлен запуск третьего советского искусственного спутника Земли, и этот вариант ракеты (8А91, внутреннее обозначение ОКБ-1 – Б-1-1) [13, 22] был здесь назван Р-7-3.

Возможно, разделение гравитационных потерь по ступеням как Р-7-3, так и Союза-У не очень точное, однако этот параметр, по существу, является для них справочным и практически никак не влияет на выходные параметры, в первую очередь на массу полезной нагрузки на целевой орбите. Проведенный для ракеты Р-7-3 баллистический расчет, аналогичный тому, что был сделан для ракет-носителей Saturn V, Titan II, Зенит-2SLB и Союз-У, за исключением того, что у ракеты Р-7-3 относительные остатки топлива и рабочих тел были взяты вдвое меньше, чем у ракет более поздних выпусков. Это было вызвано тем, что, насколько можно сейчас судить по данным источника [13], в тех запусках разгон полезной нагрузки производился без гарантийных остатков вплоть до максимально возможного исчерпания топлива, допустимого по техническим характеристикам заборных устройств. При таких условиях в результате баллистического расчета получилось (см. таблицу 5), что на заданную эллиптическую орбиту с высотами перигея 225 км и апогея 1880 км ракета Р-7-3 может вывести полезную нагрузку массой m_p = 1.28 т, что всего на 50 кг меньше массы третьего спутника m_p = 1.33 т [6]. Таким образом, даже в этом по априорным представлениям нерасчетном случае описанные в разделах IV – VIII формулы оказываются правильными с точностью, примерно, до 20 – 25 м/с. По результатам этих оценок можно еще раз отметить огромную избыточность ракеты Р-7 для решения той задачи, которая ее прославила – демонстрации возможности выведения на околоземную орбиту искусственного объекта.

Можно также указать на не вполне очевидный эффект, выявленный в результате проведенных расчетов. Оказывается, что не слишком сильное уменьшение удельного импульса ракетного двигателя у поверхности Земли при сохранении импульса вакуумного и стартовой тяги может привести к тому, что полезная нагрузка ракеты не уменьшится, а даже немного возрастет. Это происходит из-за того, что слабое возрастание потерь на противодавление компенсируется падением гравитационных потерь вследствие более интенсивного уменьшения массы ракет и увеличения тяги ее двигателей на начальном участке траектории и, вследствие этого, возрастания там ее ускорения (влияние этого эффекта на аэродинамические потери, которые и сами по себе невелики, незначительно). Таким образом, ухудшение характеристик подсистемы может даже улучшить характеристики всей системы в целом. Можно предположить, что обнаружение этого эффекта другими способами, например, путем решения систем дифференциальных уравнений, оказалось бы существенно более сложным делом.

X – Заключение

Метод интегральных оценок гравитационных, аэродинамических потерь, потерь на управление и на противодавление и, соответственно, характеристической скорости выведения полезной нагрузки на низкую околоземную орбиту, дает погрешность в определении потерь у ракет Saturn V, Titan II, Зенит-2SLB, Союз-У, Р-7 и одноступенчатого носителя (ОН) не более чем ± 10 – 15 м/с. Для использования этого метода достаточно знать следующие основные проектные параметры: широту точки старта, азимут пуска или угол наклонения орбиты, число ступеней, стартовую массу ракеты и стартовую тягу ее двигателей, а также их удельные импульсы в вакууме и у поверхности Земли. В случае параллельной работы ступеней желательна также информация о продолжительности этого участка разгона. Использование этого метода позволяет выявить эффекты нелинейного и немонотонного влияния проектных параметров на выходные характеристики ракет-носителей.

Литература

1. В. И. Левантовский – Механика космического полета в элементарном изложении. Москва, Наука, 1980.
2. И. И. Шунейко – Пилотируемые полеты на Луну, конструкция и характеристики Saturn V Apollo. *Серия Ракетостроение*, т. 3. Москва, 1973 // http://epizodsspace.testpilot.ru/bibl/raketostr3/obl.html
3. Ю. Г. Сихарулидзе – Баллистика летательных аппаратов. Москва, Наука, 1982 // http://www.mai.ru/colleges/war/ballist/books/Flyght_obj_theory/main.htm
4. Д. А. Воронцов – частное сообщение, 2008.
5. Zenit-2. *Encyclopedia Astronautica* // http://www.astronautix.com/lvs/zenit2.htm
6. Космонавтика (Энциклопедия), под ред. В. П. Глушко. Москва, Советская Энциклопедия, 1985.
7. LR-87-7. *Encyclopedia Astronautica* // http://www.astronautix.com/engines/lr877.htm
8. LR-91-7. *Encyclopedia Astronautica* // http://www.astronautix.com/engines/lr917.htm
9. РД-170/171. НПО Энергомаш, 2008 // http://www.npoenergomash.ru/engines/rd171m/
10. РД-120. НПО Энергомаш, 2008 // http://www.npoenergomash.ru/engines/rd120/
11. Ракета-носитель «Союз-У». *Программа МКС – «Прогресс М-50»*. ФКА, выпуск 9, 2004 (13) // http://www.roscosmos.ru/video/Progress_M50_www.pdf
12. Основные характеристики ракеты Р-7. *РКК «Энергия»*, 2008 // http://www.energia.ru/energia/launchers/rocket-r7.html
13. Б. Е. Черток – Ракеты и люди, кн. 2. Фили – Подлипки – Тюратам. Москва, Машиностроение, 1999 // http://epizodsspace.testpilot.ru/bibl/chertok/kniga-2/4-1.html
14. Ю. И. Лобановский – Законы сохранения и феноменология ракетных двигателей. *Synerjetics Group*, 2008 // http://synerjetics.ru/article/rocket_engines.htm
15. 1976 Standard Atmosphere Calculator // http://www.digitaldutch.com/atmoscalc/
16. Л. И. Седов – Механика сплошной среды, т. 2. Москва, Наука, 1976.
17. Г. Корн, Т. Корн – Справочник по математике. Москва, Наука, 1974.
18. А. В. Суворов – частное сообщение, 2008.
19. Sea Launch User’s Guide, 2000 // http://www.aiaa.org/tc/sos/Launch_Management_Guide/Appendix%20C%5CSea_Launch_users_guide_rev_c.pdf
20. Ракета-носитель Союз-У. ЦЕНКИ // http://www.tsenki.com/Roket1Show.asp?RoketID=6
21. Запуск пилотируемого космического корабля Союз-ТМ. ФКА, 2002 // http://www.federalspace.ru/Start1Show.asp?StartID=73
22. Ракеты-носители семейства Р-7. ФКА, 2008 // http://www.federalspace.ru/RoketsStep2.asp?RModelID=10

Выражаю благодарность Д. А. Воронцову, А. В. Суворову, В. И. Рубайло и Р. А. Шарафутдинову, оказавшим влияние как на обращение автора к этой теме, так и на полученные результаты.

Москва,
06.04.2008

Ю. И. Лобановский